Primer Parcial de Análisis Matemático IV, 2 de Marzo de 1999

1. Sea f una función entera y A el conjunto de números complejos que verifican que o bien su parte real o bien su parte imaginaria son números enteros. Supongamos que $\exists M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in A$. Pruébese que f es constante.

2. Considérese f una función entera y $w \in \mathbb{C}$. Demostrar que se cumple alguna de las dos siguientes afirmaciones:

   (a) La ecuación $f(z) = w$ tiene solución.

   (b) Existe una sucesión $\{z_n\} \to \infty$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$.

3. Sean $a \neq b$ dos números complejos. Mediante el logaritmo principal, definimos la función $f(z) := \log(\frac{z-a}{z-b})$ para $z \in \mathbb{C}\backslash\{a, b\}$. Justifíquese que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $\Omega = \mathbb{C}\backslash[a, b]^*$.

   Sea γ un camino cerrado en Ω, justificar que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{dz}{z-b}$$

   Si $a = i, b = 1$, obténgase la serie de Taylor de f en $z = 0$. Calcular el radio de convergencia de dicha serie y dígase donde representa a f.

4. Hallar un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, Re(z) > 0\}$$

   en el disco unidad.